Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles

Master Mathématiques et et Applications - Deuxième semestre

Maxime Hodier
D'après **A. Boritchev**
Université Claude Bernard Lyon 1

5 mars 2019

Table des matières

Première partie

Rappels d'analyse fonctionnelle

1 Introduction

Définition 1.1. $L^p(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des fonctions p-intégrables, *i.e.* $\|f\|_{L_p}^p = \|f\|_p^p = \int |f|^p \ < \infty$.

Remarque 1.1. À partir de maintenant, Ω est supposé connexe.

Définition 1.2 (Dual).
Soit E un espace vectoriel normé. E^* est son dual, *i.e.*, l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans $\mathbb{R}$ (vectoriel $\rightarrow$ linéaire et normé $\rightarrow$ continue).

Définition 1.3 (Convergences).

- Convergence faible :

$$E \ni x_n \rightharpoonup x \in E \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varphi \in E^* \qquad \varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$$

- Convergence faible $\ast$ dans E^* :

$$E^* \ni \varphi_n \overset{\ast}{\rightharpoonup} \varphi \in E \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E \qquad \varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$$

Théorème 1.1 (Banach-Alaoglu cas E séparable).
La boule unité de E^* est $\ast-faible$ compacte.

Théorème 1.2. $\diamond$ *Pour $p < +\infty$:* $(L^p)' = L^{p'}$ *où* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$\diamond$ *Pour $p = +\infty$: $(L^\infty)' \supsetneqq L^1$*

2 Inégalités et corollaires

Proposition 2.1 (Inégalité de Hölder).
Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ alors :

$$fg \in L^1(\Omega) \qquad et \qquad \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'} \qquad où \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Définition 2.1 (Convolution).
Pour $p, q \in [1, +\infty[$, avec la condition $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1$, on a que la convolution $u * v$ entre $u \in L^p$ et $v \in L^q$ est un élément de L^r ; où r est donnée par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$; définie par :

$$(u * v)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-t)v(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v(x-t)dt$$

Proposition 2.2 (Inégalité de Young).

$$\|u * v\|_r \leqslant \|u\|_p \|v\|_q \qquad avec \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \tag{2.1}$$

Corollaire 2.1 (de Young).
$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ (sauf si $p = +\infty$).

Démonstration.
Cette preuve utilise l'approximation de l'unité (cf. Le Dret). $\square$

Remarque 2.1. Si $p = \infty$, soit $f \equiv 1$. Supposons qu'il existe $(f_n)_n \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $f_n \xrightarrow{L^\infty} f$.
Impossible. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in \Omega$ tel que $f_n(x_n) = 0$ (il suffit de prendre $x_n \in \Omega \backslash Supp(f_n)$).
Donc $f(x_n) - f_n(x_n) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^\infty} \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Contradiction avec l'hypothèse $f_n \longrightarrow f$.

3 Multi-indice et dimension supérieure

Définition 3.1. Pour $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$. $\overrightarrow{\alpha}$ est appelé : **multi-indice**.
On a :

$$|\overrightarrow{\alpha}| := \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \quad ; \qquad \overrightarrow{\alpha}! := \prod_{k=1}^{N} \alpha_k! \quad ; \qquad \overrightarrow{x}^{\vec{\alpha}} := \prod_{k=1}^{N} x_k^{\alpha_k}$$

Pour se rappeler de ces formules, il faut que leurs définitions fonctionnent en dimension $N = 1$.

Définition 3.2 (Différentielle).
Pour $\overrightarrow{\alpha} \in \mathbb{N}^N$, on pose $|\overrightarrow{\alpha}| = k$. Soit $u \in C^k(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. On définit la différentielle comme suit :

$$\partial^{\vec{\alpha}} u = \frac{\partial^k u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_N} x_N}$$

Exemples 3.1. (1)

$$\partial^{(1,42,69)} u = \frac{\partial^{112} u}{\partial x_1 \partial^{42} x_2 \partial^{69} x_3}$$

(2)

$$\partial^{(75,13)} u = \frac{\partial^{88} u}{\partial^{75} x_1 \partial^{13} x_2}$$

Comme la rivalité Lyon - St-Étienne, on a la rivalité Paris - Marseille

Définition 3.3 (Coefficient binomial d'un multi-indice).

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{N} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

Défini si $0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ noté : $\vec{0} \leqslant \vec{\beta} \leqslant \vec{\alpha}$.

Rappel 3.1. Si $0 \leqslant n \leqslant m$, $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} := \frac{m!}{n!(m-n)!}$ et donc $m - n \geqslant 0$ car la factorielle n'est définie que pour les entiers positifs.

Tout est cohérent car :

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} = \frac{\vec{\alpha}!}{\vec{\beta}!(\vec{\alpha} - \vec{\beta})!}$$

En effet :

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{N} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k!}{\beta_k!(\alpha_k - \beta_k)!} = \frac{\prod \alpha_k!}{\prod \beta_k! \prod (\alpha_k - \beta_k)!} = \frac{\vec{\alpha}!}{\vec{\beta}!(\vec{\alpha} - \vec{\beta})!}$$

Proposition 3.1 (Taylor avec o)**.**

- *En dimension* 1 *:*

  Soit $f \in C^k(I)$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $x, y \in I$. On a la formule de Taylor :

$$f(y) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(y-x)^i}{i!} \ f^{(i)}(x) + o((y-x)^k) \tag{3.1}$$

- *En Dimension supérieure :*

  Soit $f \in C^k(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \Omega$ tels que pour tout $t \in [0,1]$, $t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \in \Omega$. Alors :

$$f(\vec{y}) = \sum_{|\vec{\alpha}| \leqslant k} \frac{(\vec{y} - \vec{x})^{\vec{\alpha}}}{\vec{\alpha}!} \ \partial^{\vec{\alpha}} f(\vec{x}) + o(\|\vec{y} - \vec{x}\|^k) \tag{3.2}$$

Proposition 3.2 (Leibnitz)**.**

- *En dimension* 1 *: Soient $f, g \in \mathcal{C}^k(I)$. Pour $x \in I$ avec I un intervale de $\mathbb{R}$:*

$$(fg)^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} f^{(i)}(x) \ g^{(k-i)}(x) \tag{3.3}$$

- *En dimension supérieure : Soient* $f, g \in C^k(\Omega)$. *Soient* $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \Omega$ *tels que pour tout* $t \in [0,1]$, $t\overrightarrow{x} + (1-t)\overrightarrow{y} \in \Omega$. *Si* $|\overrightarrow{\alpha}| \leqslant k$ *alors :*

$$\partial^{\overrightarrow{\alpha}}(fg)(x) = \sum_{\vec{\beta} \leqslant \vec{\alpha}} \begin{pmatrix} \overrightarrow{\alpha} \\ \overrightarrow{\beta} \end{pmatrix} \partial^{\vec{\beta}} f(x)\ \partial^{(\vec{\alpha}-\vec{\beta})} g(x) \tag{3.4}$$

Deuxième partie

Un peu d'Analyse fonctionnelle et de fonctions test

1 Quelques définitions

Lemme 1.1 (de localisation)**.**
Si $f \in L^1$ satisfait :

$$\forall g \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \qquad \int fg = 0$$

Alors $f \equiv 0$.

Définition 1.1. L'espace $L^1_{loc}(\Omega)$.
$f \in L^1_{loc}$ veut dire que pour tout compact mesurable $K \underbrace{\subset\subset}_{\substack{compact\\inclus}} \Omega \qquad f \in L^1(K)$.

Exemples 1.1. • Si $\Omega = \mathbb{R}$: $f = 1$

- $f \in L^p$ pour tout $p \in [1, +\infty]$:

$$f \in L^p(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad f \in L^p(K) \quad \Longrightarrow \quad f \in L^1(K) \quad car \ \ |K| < \infty$$

Remarque 1.1. On peut sans problème définir le support pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Définition 1.2. $D(\Omega) := \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Définition 1.3 (convergence dans D).
$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans $D(\Omega)$ veut dire qu'il existe $K \subset\subset \Omega$ tel que :

$$\begin{cases} \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_0 \qquad Supp(f_n) \subset K \ \ et \ \ Supp(f) \subset K \\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \qquad \sup\limits_{\substack{x\in K\\(x\in\Omega)}} |\partial^\alpha f_n(x) - \partial^\alpha f(x)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

2 Distributions

Définition 2.1. $D'(\Omega) = (D(\Omega))'$.
On dit que γ est une distribution (ou forme linéaire et continue) sur D si γ vérifie :

- Linéarité :

$$\begin{cases} \gamma(\lambda\varphi) = \lambda\gamma(\varphi) \\ \gamma(\varphi) + \gamma(\psi) = \gamma(\varphi + \psi) \end{cases}$$

- Continuité :

  Pour tout $K \subset\subset \Omega$:

$$\exists N(K) \geqslant 1 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \quad \textit{telle que} \qquad Supp(\varphi) \subset K, \quad \textit{on a} \underbrace{|\langle \gamma, \varphi \rangle|}_{=\gamma(\varphi)} \leqslant C_K \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leqslant N(K)}} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

$$\textit{ou} \quad C_K \sum_{|\alpha| \leqslant N(K)} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

Proposition 2.1. *Si* $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$, *alors* $\varphi(f_n) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(f)$ *dans* $\mathbb{R}$ *pour tout* $\varphi \in D'$.

Démonstration.

Il existe $K \subset\subset \Omega$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Supp(f_n) \subset K$ *et* $Supp(f) \subset K$.

Comme $Supp(f_n - f) \subset K$, il existe C_K et N_K tels que :

$$|\varphi(f_n - f)| \leqslant C_K. \max_{|\alpha| \leqslant N_K} \|\partial^\alpha (f - f_n)\|_\infty$$

Or, $\|\partial^\alpha (f_n - f)\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ par continuité de la norme infinie.

D'où :

$$|\varphi(f_n) - \varphi(f)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Donc :

$$\varphi(f_n) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(f)$$

□

Définition 2.2. On a la définition, par dualité, de la convergence :

$\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi$ dans D' veut dire que :

$$\forall f \in D \qquad \varphi_n(f) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(f)$$

Remarque 2.1. La convergence dans D' peut se voir comme une convergence faible-$*$.

Exemples 2.1.

- **Pour tout $p \geqslant 1$, $L^p(\Omega) \subset D'(\Omega)$:**

  Dans le sens où pour tout $\gamma \in L^p(\Omega)$, $\gamma : \underset{D(\Omega)}{\underset{\Cap}{f}} \longmapsto \int \underset{\substack{D \\ \cap \\ L^{p'}}}{\underset{\Cap}{f}} \; \underset{L^p}{\underset{\Cap}{\gamma}} \in \mathbb{R}$ est une distribution.

  - **Linéarité :** Évident

– **Continuité :** Soit $K \subset\subset \Omega$ tel que $Supp(f) \subset K$. On a, $|\gamma(f)| = \left|\int f\gamma\right|$.

$\boxed{\text{Si } p \neq 1}$ Alors $p' \neq \infty$. D'où :

$$|\gamma(f)| = \left|\int_K f\gamma\right| \leqslant \|f\|_{p'}\|\gamma\|_p \leqslant \|\gamma\|_p . \left(\int_K |f|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\leqslant \|\gamma\|_p \left(|K| . \|f\|_\infty^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \underbrace{\|\gamma\|_p . |K|^{1/p'}}_{Cte\ C_K} \sup_{|\alpha| \leqslant 0} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

$\boxed{\text{Si } p = 1}$ $|\gamma(f)| \leqslant \|f\|_\infty \|\gamma\|_1$ donc c'est bon et $C_K = \|\gamma\|_1$ ne dépend plus du compact.

- **$L^1_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega)$:**
  Si $\gamma \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\varphi \in D$ et si $Supp(\varphi) \subset K \subset\subset \Omega$ alors, par l'inégalité de Hölder (Inégalité (2.1)) :

$$|\gamma(\varphi)| = \left|\int_K \gamma\varphi\right| \leqslant \|\gamma\|_{L^1(K)} \|\varphi\|_\infty$$

Définition 2.3. $\partial_i\gamma$ pour $\gamma \in D'$.
$\partial_i\gamma \in D'$ est définie par :

$$\varphi \longmapsto \partial_i\gamma(\varphi) := (-1).\gamma(\partial_i\varphi)$$

Si $\gamma \in \mathcal{C}^1(\Omega)$: $\partial_i\gamma$ est la dérivée usuelle $\partial_i\gamma$ (dérivée de γ par rapport à la i-ème coordonnées). Pour le voir, il suffit d'intégrer par parties. En effet :

Exemple 2.1. Si $\Omega =]a, b[$.

$$\int_a^b \gamma'\varphi = -\int_a^b \gamma\varphi' + \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} [\varphi(b-\varepsilon)\gamma(b-\varepsilon) - \varphi(a-\varepsilon)\gamma(a-\varepsilon)]}_{=0 \quad car\ \varphi\ est\ à\ support\ compact}$$

3 Généralisation en dimension supérieure : Distribution couche simple

Définition 3.1 (Généralisation - par récurrence).
Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\gamma \in D'$, $\partial^\alpha \gamma$ est donnée par :

$$D \ni \varphi \longmapsto \langle \partial^\alpha \gamma, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \gamma, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

On admettra pour la suite que ces objets sont des distributions. En effet, la linéarité est évidente et il suffirait de montrer la continuité.

Définition 3.2 (Le Dirac en x noté δ_x).

$$\delta_x \ : \ D \ni \varphi \longmapsto \varphi(x)$$

Proposition 3.1. *δ_x est bien une distribution.*

Démonstration.
Soit $K \subset\subset \Omega$.

$$|\langle \delta_x, \varphi \rangle| = |\varphi(x)| \leqslant \overset{C_K}{\overset{\shortparallel}{1}} . \|\varphi\|_\infty$$

Rien ne dépend de K car $C_K = 1$ et $N_K = 0$. $\square$

Remarque 3.1. $\delta'_x \ : \ \varphi \longmapsto (-1)\langle \delta_x, \varphi' \rangle = -\varphi'(x)$. D'où :

$$\langle \delta'_x, \varphi \rangle = -\langle \delta_x, \varphi' \rangle$$

Il suffit d'appliquer la définition de la dérivée (Définition (3.1)).

Définition 3.3 (Couche simple).
$\Omega = \mathbb{R}^2$. Soit $\Delta \in \mathbb{R}^2$ une droite (Considérer, de manière générale, que Δ est un hyperplan, *i.e.*, un objet de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$).
On définit : $D(\mathbb{R}^2) \ni \varphi \ : \longmapsto \int\limits_\Delta \varphi$.
Si $Supp(\varphi) \subset K$ alors :

$$\left| \int\limits_\Delta \varphi \right| \leqslant \mu(\Delta \cap K) \|\varphi\|_\infty$$

où μ est la mesure de Lebesgue en dimension 1 sur la droite.

Troisième partie

Théorie des distributions : Manipulations et propriétés

1 Généralités

Définition 1.1 (Ordre d'une distribution γ).
Pour tout $K \subset\subset \Omega$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ avec $Supp(\varphi) \subset K$:

$$|\langle \gamma, \varphi \rangle| \leqslant C_K . \sup_{|\alpha \leqslant N} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

Pour chaque compact, il existe $N_K \in \mathbb{N}$ minimal que l'on va appeler l'ordre de γ sur K et noter $ordre_K(\gamma)$.
Alors :

$$ordre_\Omega(\gamma) = \sup_K \{ordre_K(\gamma)\}$$

Exemples 1.1. $f \in L^1_{loc}$, δ_0, δ_0', $\sum\limits_{n \geqslant 1} \delta_n$, $\sum\limits_{n \geqslant 1} \delta_n^{(n)}$:

- ◇ Si $f \in L^1_{loc}$: $ordre = 0$ (car 0 dérivées)
- ◇ δ_0 : $ordre = 0$
- ◇ δ_0' : $ordre = 1$
- ◇ $\sum\limits_{n \geqslant 1} \delta_n$: $ordre = 0$ mais pourquoi est-ce vraiment une distribution car on a une somme infinie ?

  Il s'agit bien d'une distribution car :

  Soit $K \subset\subset \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset [-N, N]$:

$$\left| \langle \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n, \varphi \rangle \right| = |\varphi(1) + \cdots + \varphi(N-1)| \leqslant (N-1)\|\varphi\|_\infty$$

- ◇ $\sum\limits_{n \geqslant 1} \delta_n^{(n)}$: $ordre = +\infty$.

Remarque 1.1. Une somme **infinie** de distributions n'est pas toujours une distribution. En effet : $\sum\limits_{n \geqslant 1} \delta_{\frac{1}{n}}$ n'est pas une distribution sur $\Omega = \mathbb{R}$. Par contre, c'est une distribution sur $\Omega =]0, 1[$.

$\boxed{\text{Si } \Omega = \mathbb{R}}$ La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge dès que $\varphi(0) \neq 0$.

En effet, quand $n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ et comme φ est continue, $\varphi(\frac{1}{n}) \xrightarrow{n \to \infty} \varphi(0)$. Du coup, si $\varphi(0) \neq 0$ alors la limite du terme général de la série est différente de 0 ce qui implique

que la série diverge grossièrement.

$\boxed{\text{Si } \Omega =]0,1[}$ Si $Supp(\varphi) \subset\subset K$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \left[\frac{1}{N}, 1 - \frac{1}{N}\right]$. Alors :

$$\left| \langle \sum_{n \geqslant 1} \delta_{\frac{1}{n}}, \varphi \rangle \right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \left| \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leqslant N \|\varphi\|_{\infty}$$

Définition 1.2 (Support d'une distribution).
Soit $\gamma \in D'(\Omega)$. Soit $\widetilde{\Omega}$ l'ouvert maximal tel que :

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \qquad Supp(\varphi) \subset \widetilde{\Omega} \implies \langle \gamma, \varphi \rangle = 0$$

Alors le fermé **relatif** $\Omega \backslash \widetilde{\Omega}$ dans Ω est appelé **support de** γ.

Exemples 1.2.

- Si $\gamma \in L^1_{loc}$ les 2 notions de support coïncident
- $Supp(\delta_0) = \{0\}$
- $Supp\left(\sum_{n \geqslant 1} \delta_n^{(n^2)}\right) = \mathbb{N}$

Proposition 1.1. *Si $Supp(\gamma) = \{x\}$ un singleton. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ et il existe une suite $(b_{\vec{\alpha}})_{|\vec{\alpha}| \leqslant N}$ où $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ tels que :*

$$\gamma = \sum_{|\vec{\alpha}| \leqslant N} b_{\vec{\alpha}} \partial^{\vec{\alpha}} \delta_x$$

Remarque 1.2. La réciproque de la proposition précédente (proposition (1.1), $TD2$ Ex 2) est vraie mais triviale.

Définition 1.3 (Réflexion par densité).
$\Omega = \mathbb{R}^N$. Soit $\varphi \in D$. On définit $\widetilde{\varphi}$ par :

$$\widetilde{\varphi} := \varphi(-\cdot), \quad i.e., \quad x \longmapsto \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$$

Soit $\gamma \in D'$, on définit $\widetilde{\gamma}$ par :

$$\widetilde{\gamma} : \varphi \longmapsto \langle \gamma, \widetilde{\varphi} \rangle = \gamma(\widetilde{\varphi})$$

Remarque 1.3. On pourrait aussi définir de même les dilatations et les translations dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.4 (Conjugaison).
Soit $\gamma \in D'$. On définit $\overline{\gamma}$ par :

$$\overline{\gamma} : \varphi \longmapsto \overline{\langle \gamma, \overline{\varphi} \rangle} \qquad \text{où} \quad \bar{\cdot} \quad \textit{est le conjugé dans } \mathbb{C}$$

Si $\gamma \in L^\infty$ alors $\overline{\gamma}$ coïncide avec la conjugaison usuelle de fonctions.

Définition 1.5. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
Si $\varphi \in D$, alors $f\varphi \in D$.
Pour $\gamma \in D'$ on peut définir :

$$f\gamma : \varphi \longmapsto \langle \gamma, f\varphi \rangle$$

Proposition 1.2. *Les* 5 *opérations suivantes :*

- **(i)** *Réflexion*
- **(ii)** *Conjugaison*
- **(iii)** *Multiplication par* $f \in C^\infty$
- **(iv)** *Translation*
- **(v)** *Dérivation*
- **(vi)** *Dilatation*

donnent bien des distributions. Chacune de ces opérations sont continues de D' *dans lui-même.*

Application 1.1. Montrons que la valeur absolue $|\cdot|$ est une distribution et calculons sa dérivée (au sens des distributions). Soit $\gamma : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \int |x|\varphi(x)dx \end{array}$.

$\boxed{\gamma \text{ est une distribution}}$

$$\gamma \in L^\infty_{loc}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \gamma \in L^1_{loc}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \gamma \quad \textit{est une distribution}$$

Car γ est bornée sur chaque compact.

$\boxed{\text{Calcul de } \gamma'}$ Soit $\varphi \in D$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \gamma', \varphi \rangle = -\langle \gamma, \varphi' \rangle &= -\int_{-\infty}^{0} (-x)\varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} x\varphi'(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} x\varphi'(x)dx \\
&= [x\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx - [x\varphi(x)]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} sign(x)\varphi(x)dx
\end{aligned}$$

Donc $(|\cdot|)' = sign(x)$.

Application 1.2. Même chose avec la fonction $sign(x)$.

$$\begin{aligned}
\langle sign', \varphi \rangle = -\langle sign, \varphi' \rangle &= \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx \\
&= \varphi(0) - (-\varphi(0)) = \langle 2\delta_0, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

Donc $sign' = 2\delta_0$ ($2\delta_0$ correspond à la taille du saut).

Proposition 1.3 (Formule des Sauts)**.**
Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle I, i.e. :

- *il existe une subdivision $a_1, \cdots, a_n$ telle que f est $\mathcal{C}^1$ sur $I \backslash \{a_1, \cdots, a_n\}$ (qui est un ouvert non connexe mais ça ne pose aucun problème)*
- $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$ $\quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(a_i + \varepsilon)$ *et* $\lim_{\varepsilon \to 0^-} f(a_i - \varepsilon)$ *existent et sont finies*

Alors on a dans D' :

$$f' = f'_{|\mathbb{R}\backslash\{a_i\}} + \sum_{i=0}^{n} \delta_{a_i}[f(a_i^+) - f(a_i^-)] \tag{1.1}$$

Remarques 1.1. (1) $\mathcal{C}^1$ par morceaux peut également être définie avec une subdivision dénombrable (non forcément finie) tant que pour tout $K \subset\subset I$, K contient un nombre finir de a_i.

(2) Comme $f \in L^1_{loc}$, f est vue comme une distribution

Démonstration.
La démonstration est identique à l'exemple (1.2). □

Exemple 1.1. On peut appliquer la formule des sauts (formule (1.1)) à la fonction partie entière.
Soit γ la partie entière. Calculons γ' :

$$\gamma' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$$

2 Convolution

Référence : Le Dret Chapitre 6.

Proposition 2.1.

$$\lim_{k\to+\infty} \mathcal{X}_k = \delta_0$$

<u>*Rappel*</u> 2.1. $\mathcal{X}_k : x \longmapsto k^n \mathcal{X}(kx)$ où $\begin{cases} \mathcal{X} \in D \\ Supp(\mathcal{X}) \subset B(0,1) \\ \int \mathcal{X} = 1 \end{cases}$

Démonstration.
Soit $\varphi \in D$. On a :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{X}_k, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_k(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} k^n\mathcal{X}(kx)\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}(y)\underbrace{\varphi\left(\frac{y}{k}\right)}_{\to\varphi(0)} \qquad (\textit{avec chgt. de var.}\ \ y = kx)\end{aligned}$$

Comme

$$\left|\mathcal{X}(y)\varphi\left(\frac{y}{k}\right)\right| \leqslant \|\mathcal{X}\|_\infty \mathbb{1}_{B(0,1)} \sup_{B(0,1)} |\varphi|$$

uniformément en k et cette fonction là est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et de plus φ est continue donc on peut passer à la limite sous l'intégrale :

$$\langle \mathcal{X}_k, \varphi\rangle \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}(y)\varphi(0)dy = \varphi(0).\overbrace{\int \mathcal{X}}^{=1} = \langle \delta_0, \varphi\rangle$$

$\square$

Définition 2.1 (Convolution $D' \times D \to \mathcal{C}^\infty$).
Pour $\gamma \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\gamma * \varphi \ : \ x \ \longmapsto \ \langle \gamma, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

Proposition 2.2.
Si : $-$ $f \in \mathcal{C}_c^\infty$ *et* $g \in L^1_{loc}$

ou

$-$ $f \in \mathcal{C}^\infty$ *et* $g \in L^1$

Alors $f * g$ *est bien définie et est dans* L^∞ *(Par Young, Inégalité (2.1)).*
De plus $f * g \in \mathcal{C}^\infty$ *et :*

$$\partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha f * g$$

Démonstration.
Cf. Cours de Golse, Chapitre 1 partie 3.

□

Proposition 2.3. *Pour* $\gamma \in D'$ *et* $\varphi \in D$, $\gamma * \varphi$ *est bien* $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration.
En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$: $\partial^\alpha (\gamma * \varphi) = \partial^\alpha \gamma * \varphi = \gamma * \partial^\alpha \varphi$
qui est bien $\mathcal{C}^\infty$ car $\varphi \in D = \mathcal{C}_c^\infty$.

□

Proposition 2.4. *Pour* $\gamma \in D'$ *et* $\varphi, \psi \in D$:

$$\langle \gamma * \psi, \varphi \rangle = \langle \gamma, \widetilde{\psi} * \varphi \rangle \qquad \text{où} \quad \widetilde{\psi} : x \mapsto \psi(-x)$$

Théorème 2.1. $D(\Omega)$ *est séquentiellement dense dans* $D'(\Omega)$, *i.e. :*

$$\forall \gamma \in D'(\Omega) \quad \exists \varphi_n \in D(\Omega) \qquad \varphi_n \longrightarrow \gamma \qquad \text{dans} \ \ D'$$

Théorème 2.2.

$$\forall \varphi \in D \qquad \delta_0 * \varphi = \varphi$$

Démonstration.
Soit $\psi \in D$.

$$\langle \delta_0 * \varphi, \psi \rangle = \langle \delta_0, \widetilde{\varphi} * \psi \rangle = \widetilde{\varphi} * \psi(0) = \int_x \widetilde{\varphi}(0 - x) \psi(x) dx = \int_x \varphi(x) \psi(x) dx = \langle \varphi, \psi \rangle$$

□

Quatrième partie

Transformée de Fourier, Espace de Schwarz et Distributions tempérées

1 Transformée de Fourier sur L^2

Définition 1.1 (Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$).

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d) \qquad \mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{|\mathbb{R}^d|} e^{-i(x,\xi)} f(x)dx$$

où $(\cdot\,,\cdot)$ est le produit scalaire.

Proposition 1.1. *$\mathcal{F}$ est une fonction linéaire et continue de L^1 dans l'espace C_0 où :*

$$C_0 = \{g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d) : \lim_{|\xi|\to\infty} g(\xi) = 0\} \quad \textit{muni de la norme } L^\infty$$

Démonstration.

$\boxed{\mathcal{F} \text{ linéaire}}$ Clair

$\boxed{\mathcal{I}m(\mathcal{F}) \subset L^\infty \text{ et } \mathcal{F} \text{ est continue de } L^1 \text{ dans } L^\infty}$ En effet, pour tout $f \in L^1$:

$$\|\mathcal{F}f(\xi)\|_\infty \leqslant \int_{|\mathbb{R}^d|} |f(x)|dx = \|f\|_1 \qquad \textit{car} \quad |e^{-i(x,\xi)}| = 1$$

Il s'agit d'une application linéaire de norme inférieure à 1 de L^1 dans L^∞.

$\boxed{\mathcal{I}m(\mathcal{F}) \subset \mathcal{C}^0}$ On passe à la limite sous le signe intégrale (CV Dominée). On peut car on a la domination suivante :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \qquad \left|e^{-i(x,\xi)} f(x)\right| \leqslant |f(x)| \qquad \textit{pour} \quad f \in L^1$$

$\boxed{\mathcal{I}m(\mathcal{F}) \in C_0}$ On commence par traiter le cas où $f \in D$.

Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$ non nul, on a :

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,\xi)} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_d\xi_d)} f(x)dx$$

$$IPP \textit{ suivant } \xi_k \quad \longrightarrow \quad = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{-1}{i\xi_k} e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_d\xi_d)} \partial_k f(x)dx = \frac{-1}{i\xi_k} \mathcal{F}\partial_k f(x)(\xi)$$

Or, $\partial_k f \in D \subset L^1$. Du coup $\mathcal{F}\partial_k f \in L^\infty$. D'où :

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leqslant \frac{1}{|\xi_k|} \|\mathcal{F}\partial_k f\|_\infty$$

Ceci est vrai pour tout $k \in \{1, \cdots, d\}$, d'où :

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leqslant \min\left(\frac{1}{|\xi_1|}, \cdots, \frac{1}{|\xi_d|}\right) \max_k \|\mathcal{F}\partial_k f(x)\|_\infty \leqslant \frac{1}{max\{|\xi_1|, \cdots, |\xi_d|\}} \max_k |\mathcal{F}f'\|_\infty \overset{\|\xi\| \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Reste à étendre par densité à $f \in L^1$.

Soit $(f_k)_k \subset D$ une suite approximante telle que $f_k \longrightarrow f$ dans L^1.

On veut montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \qquad |\xi| \geqslant M \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{F}f(\xi)| \leqslant \varepsilon$$

Prenons k tel que : $\|f - f_k\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $\mathcal{F} : L^1 \longrightarrow L^\infty$ est de norme inférieure à 1, alors :

$$\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}f_k\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

D'autre part, il existe $M > 0$ (qui dépend de k et ε) tel que :

$$|\xi| \geqslant M \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{F}f_k(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Du coup, par l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$|\xi| \geqslant M \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{F}f(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Proposition 1.2. *Si $f, g \in L^1$. Alors :*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$$

où $f * g \in L^1$ et $\mathcal{F}(f * g), \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \in L^\infty$.

Démonstration.

Comme $f, g \in L^1$, alors $f * g \in L^1$ et les hypothèses de domination de Fubini-Tonelli sont vérifiées. D'où :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_x e^{-i(x,\xi)} f * g(x)dx = \int_x e^{-i(x,\xi)} \left(\int_y f(y)g(x-y)dy\right)dx \\ &= \int_x \int_y f(y)g(x-y)e^{-i(x,\xi)}dxdy\end{aligned}$$

On pose $\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$ où $\mathcal{J}ac\ \Phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det(\mathcal{J}ac\ \Phi) = 1$.

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_u \int_v f(v) g(u) e^{-i(u+v,\xi)} du dv \\
&= \left(\int_v f(v) e^{-i(v,\xi)} dv \right) \left(\int_u g(u) e^{-i(u,\xi)} du \right) \\
&= \mathcal{F} f(\xi) \cdot \mathcal{F} g(\xi)
\end{aligned}$$

□

Définition 1.2 (Gaussienne).
Soit $a > 0$. On définit la Gaussienne en a de $x \in \mathbb{R}^d$ part :

$$G_a(x) := \exp\left(\frac{-a\|x\|^2}{2} \right)$$

Proposition 1.3. *Pour $a > 0$, on a :*

$$\mathcal{F} G_a(\xi) = \left(\frac{2\pi}{a} \right)^{\frac{d}{2}} G_{\frac{1}{a}}(\xi)$$

Démonstration.

- ◇ Le cas générale découle du cas $a = 1$ par dilatation
- ◇ Méthode 1 : Analyse complexe (intégrale suivant le contour)
- ◇ Méthode 2 : Astuce avec les équations différentielles (cf. Le Dret)

□

Corollaire 1.1. *On a :*

$$\widetilde{\mathcal{F}} \mathcal{F} G_a(x) = (2\pi)^d G_a(x)$$

où, par définition : $\widetilde{\mathcal{F}} g(x) = \widetilde{\mathcal{F} g}(x) = \mathcal{F} g(-x)$ avec $g \in L^1$

Théorème 1.1 (1^{ere} forme de l'inversion de Fourier)**.**
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathcal{F} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On a alors :

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x,\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi = (2\pi)^{-d} \widetilde{F} \hat{f}(x)$$

Démonstration.
Voir Le Dret.

□

Théorème 1.2 (Fourier-Plancherel)**.**
L'application linéaire $(2\pi)^{\frac{-d}{2}}\mathcal{F}$*, à priori définie sur* $L^1 \cap L^2 \underset{dense}{\subset} L^2$*, se prolonge à* L^2 *en une isométrie bijective de* L^2 *dans lui-même.*
Son inverse est définie sur $L^1 \cap L^2 \underset{dense}{\subset} L^2$ *par* $(2\pi)^{\frac{-d}{2}}\widetilde{\mathcal{F}}$ *puis se prolonge par densité dans* L^2*.*

2 Espace de Schwarz : $\mathcal{S}$

Définition 2.1 ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, espace de Schwarz).

$$f \in \mathcal{S} \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \mathcal{C}^\infty \quad \textit{et} \quad \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{N}^d \qquad \vec{x}^{\vec{\alpha}} \partial^{\vec{\beta}} f \in L^\infty$$

On munit $\mathcal{S}$ d'une famille dénombrable de semi-normes indicé par $k \in \mathbb{N}$:

$$\|f\|_{k,\mathcal{S}} = \sup_{|\alpha|,|\beta| \leqslant k} |\vec{x}^{\vec{\alpha}} \partial^{\vec{\beta}} f(x)|$$

Définition 2.2 (Convergence dans $\mathcal{S}$).

$$\textit{Convergence dans } \mathcal{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{Convergence pour } \|\cdot\|_{k,\mathcal{S}} \textit{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Exemples 2.1. (1) $x \longmapsto e^{\frac{-x^2}{2}}$

(2) $x \longmapsto \frac{(x^2+4)\sin(x^2)}{e^x + e^{-18x}}$

Contre-Exemple 2.1. $x \longmapsto e^{-|x|}$ car non dérivable en 0.

Proposition 2.1. *Pour tout* $f \in \mathcal{S}$ *on a :*

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F} f(\xi) \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|} \partial^{|\alpha|}_{\xi^\alpha} \mathcal{F} f(\xi)$$

Démonstration.

Par récurrence, on se réduit à $\alpha = (0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ où 1 est placé sur le $k - i\grave{e}me$ coefficient.

Du coup, il suffit de montrer que :

$$\mathcal{F}(\partial_k f)(\xi) = i\xi_k \mathcal{F}f(\xi) \qquad et \qquad \mathcal{F}(x_k f)(\xi) = i\partial_k \mathcal{F}f(\xi)$$

On a le droit d'utiliser la formule intégrale car $f, \partial_k f, x_k f \in L^1 \cap L^2$.

En effet, $f \in \mathcal{S}$ donc $(1 + x^{d+1})f \in L^\infty$, d'où $f(x) \leqslant \frac{c}{(1+|x|^{d+1})}$ et donc $f \in L^1$.

De même, on prouve que $f \in L^2$, $\partial_k f$, $x_k f$ appartiennent à $L^1 \cap L^2$.

D'où, par intégration par parties on a :

$$\mathcal{F}(\partial_k f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,\xi)} \partial_k f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,\xi)} i\xi_k f(x) dx = i\xi_k \mathcal{F}f(\xi)$$

$$\mathcal{F}(x_k f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} x_k e^{-i(x,\xi)} f(x) dx = i\partial_k \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,\xi)} f(x) dx \right)$$

□

Proposition 2.2. *$\mathcal{F}$ envoie $\mathcal{S}$ dans lui même bijectivement.*

Démonstration.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On veut montrer que :

(i) $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$

(ii) $\forall \alpha, \beta \qquad \xi^\alpha \partial^\beta (\mathcal{F}f)(\xi)$ bornée

(i) On sait que :

$$x^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$$

En effet :

$$\|x^\alpha f\|_{k,\mathcal{S}} = \sup_{|\gamma|,|\beta| \leqslant k} \|x^\gamma \partial^\beta (x^\alpha f)\|_\infty \;\leqslant\; C \sup_{\substack{|\alpha'| \leqslant k+|\alpha| \\ |\beta'| \leqslant k}} \|x^{\alpha'} \partial^{\beta'} f\|_\infty \;\leqslant\; C\|f\|_{k+|\alpha|,\mathcal{S}}$$

- Comme $x^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a que $\mathcal{F}(x^\alpha f)$ est bien définie dans $L^2(\mathbb{R}^d)$
- Comme $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(x^\alpha f)$ est bien donnée par :

$$\mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,\xi)} x^\alpha f(x) dx$$

et surtout :

$$\mathcal{F}(x^\alpha f) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$$

Or,

$$\mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|}\partial_{\xi^\alpha}^{|\alpha|}\widehat{f}(\xi)$$

Du coup, pour tout α :

$$\partial_{\xi^\alpha}^{|\alpha|}\widehat{f}(\xi) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

C'est la preuve de $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Rappel 2.1.

$$\partial_{\xi^\alpha}^{|\alpha|} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{\xi_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{\xi_d}^{\alpha_d}} \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)$$

(ii) On a :

$$\xi^\alpha\partial^\beta(\mathcal{F}f)(\xi) = \xi^\alpha.\frac{1}{i^{|\beta|}}\mathcal{F}(x^\beta f)(\xi) = \frac{1}{i^{|\alpha|+|\beta|}}\mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta f))(\xi)$$

Il reste à montrer que $\mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta f))$ est bornée. On sait que :

$$f \in \mathcal{S} \implies x^\beta f \in \mathcal{S}$$

De même :

$$x^\beta f \in \mathcal{S} \implies \partial^\alpha(x^\beta f) \in \mathcal{S}$$

Du coup, $\partial^\alpha(x^\beta f) \in L^1 \cap L^2$. D'où :

$$\xi^\alpha\partial^\beta(\mathcal{F}f)(\xi) \in L^\infty$$

Mais on veut une information plus précise. Comme $\partial^\alpha(x^\beta f) \in \mathcal{S} \subset L^1 \cap L^2$ alors :

$$\begin{aligned}
\left|\xi^\alpha\partial^\beta(\mathcal{F}f)(\xi)\right| = \left|\mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta f))(\xi)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,\xi)}\partial^\alpha(x^\beta f)(x)dx\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\left|\partial^\alpha(x^\beta f)(x)\right|dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\underbrace{\frac{1}{(1+|x|^{d+1})}}_{\in L^1\ cf\ ex1\ TD1}\left|(1+|x|^{d+1})\partial^\alpha(x^\beta f)(x)\right|dx
\end{aligned}$$

Si on note :

$$C_d = \int_{\mathbb{R}^d}\frac{dx}{(1+|x|^{d+1})}$$

Alors, pour tout α, β on a :

$$\begin{aligned}
\left|\xi^\alpha\partial^\beta(\mathcal{F}f)(\xi)\right| &\leqslant C_d.\|(1+|x|^{d+1})\partial^\alpha(x^\beta f)(x)\|_\infty \leqslant C\sup_{\substack{|\gamma|\leqslant|\alpha| \\ |\delta|\leqslant|\beta|+d+1}}\|x^\delta\partial^\gamma f\|_\infty \\
&\leqslant C.\|f\|_{\max(|\alpha|,|\beta|)+d+1,\mathcal{S}}
\end{aligned}$$

Remarque 2.1. La première inégalité est vraie. En effet, prenons les deux fonctions :

$$g : x \longmapsto \frac{1}{1+|x|^{d+1}} \in L^1 \qquad\qquad h : x \longmapsto \left|(1+|x|^{d+1})\partial^\alpha(x^\beta f)\right| \in L^\infty$$

Donc par Hölder, le produit gh est dans L^1 et

$$\|gh\|_1 \leqslant \|g\|_1\|h\|_\infty$$

Du coup :

$$\|\mathcal{F}f\|_{k,\mathcal{S}} := \sup_{|\alpha|,|\beta|\leqslant k} \|x^\alpha\partial^\beta(\mathcal{F}f)\|_\infty \leqslant C\|f\|_{k+d+1,\mathcal{S}}$$

On a bien $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$. Il s'agit bien d'une application bijective car son inverse $(2\pi)^{-d}\widetilde{\mathcal{F}}$ envoie aussi $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

Concrètement sur $\mathcal{S}$:

- $\diamond$ $\mathcal{F}$ injective car pour tout $f_1, f_2 \in \mathcal{S}$ on a :

$$\mathcal{F}f_1 = \mathcal{F}f_2 \quad\Longrightarrow\quad (2\pi)^{-d}\widetilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}f_1 = (2\pi)^{-d}\widetilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}f_2 \quad\Longrightarrow\quad f_1 = f_2$$

- $\diamond$ $\mathcal{F}$ surjective car pour tout $g \in \mathcal{S}$:

$$g \in \Im m\mathcal{F} \quad car \quad g = \mathcal{F}(\underbrace{(2\pi)^{-d}\widetilde{\mathcal{F}}g}_{\in\mathcal{S}})$$

□

Proposition 2.3. *Pour $f, g \in \mathcal{S}$:*

(i) $\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f}.\widehat{g}$

(ii) $\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-d}\widehat{f} * \widehat{g}$

Démonstration.

(i) On a $f, g \in \mathcal{S} \quad\Longrightarrow\quad f, g \in L^p \quad$ *pour tout* p.

Prouvé pour $p = 1$, par définition c'est vrai aussi pour $p = \infty$ donc c'est vrai pour tout p par interpolation (Ex 4 - TD 1).

Du coup $f * g \in L^1$ (en appliquant Young à $f \in L^1$ et $g \in L^1$ avec $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} + 1$) et $f * g \in L^2$ (en appliquant Young à $f \in L^1$ et $g \in L^2$ avec $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1$).

Donc :

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x)dx = \int_{x\in\mathbb{R}^d} e^{-i(x,\xi)} \left(\int_{y\in\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy \right) dx$$

$H : (x,y) \longmapsto e^{-i(x,\xi)} f(y) g(x-y) \in L^1$ car :

$$|H(x,y)| \leqslant |f(y)|.|g(x-y)|$$

et avec le changement de variable $u = x - y$ et $v = y$, on obtient :

$$\int_x \int_y |H(x,y)| dxdy = \int_u \int_v |f(u)||g(v)| dudv = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$$

ce qui nous permet d'appliquer le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{y\in\mathbb{R}^d} e^{-i(y,\xi)} f(y) e^{-i(x-y,\xi)} g(x-y) dxdy \\
\left.\begin{array}{ll} u & = x-y \\ v & = y \end{array}\right\} \longrightarrow &= \int_u \int_v e^{-i(v,\xi)} f(v) e^{-i(u,\xi)} g(u) dudv \\
&= \int_u e^{-i(u,\xi)} g(u) du. \int_v e^{-i(v,\xi)} f(v) \\
&= \mathcal{F}g(\xi).\mathcal{F}f(\xi)
\end{aligned}$$

(ii) On veut montrer que $\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-d} \widehat{f} * \widehat{g}$ en utilisant **(i)**. on a, par bijectivité de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
& \forall f,g \in \mathcal{S} \qquad \mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-d} \mathcal{F}f * \mathcal{F}g \\
\Longleftrightarrow\ & \forall F,G \in \mathcal{S} \qquad \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}F.\mathcal{F}^{-1}G\right) = (2\pi)^{-d} \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}F * \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}G \\
\Longleftrightarrow\ & \forall F,G \in \mathcal{S} \qquad (2\pi)^{-d} F * G = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}F.\mathcal{F}^{-1}G\right) \\
\Longleftrightarrow\ & \forall F,G \in \mathcal{S} \qquad (2\pi)^{-d} \mathcal{F}^{-1}(F * G) = \mathcal{F}^{-1}F.\mathcal{F}^{-1}G \\
\Longleftrightarrow\ & \forall F,G \in \mathcal{S} \qquad (2\pi)^{-2d} \widetilde{\mathcal{F}}(F * G) = (2\pi)^{-2d} \widetilde{\mathcal{F}}F.\widetilde{\mathcal{F}}G \\
\Longleftrightarrow\ & \forall F,G \in \mathcal{S} \quad \forall \xi \qquad \widehat{F * G}(-\xi) = \widehat{F}(-\xi)\widehat{G}(-\xi) \qquad \textit{ce qui est vrai par } \mathbf{(i)}
\end{aligned}$$

□

3 Distributions tempérées

Définition 3.1. On a γ une distribution tempérée (notée $\gamma \in \mathcal{S}'$) si :

- γ est une forme linéaire sur $\mathcal{S}$.
- $$\exists k \in \mathbb{N} \quad \exists C > 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \qquad |\langle \gamma, \varphi \rangle| \leqslant C \|\varphi\|_{k,\mathcal{S}}$$

Définition 3.2. Par définition :

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } \mathcal{S}' \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad \langle u_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle u, \varphi \rangle$$

Proposition 3.1. *Toute distribution tempérée est une distribution.*

Démonstration.

Soit K un compact dans $\mathbb{R}^d$. Pour $\varphi \in D$ et $supp\varphi \subset K$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que :

$$|\langle \gamma, \varphi \rangle| \leqslant C \|\varphi\|_{k,\mathcal{S}}$$

par définition des distributions tempérées.

Donc :

$$|\langle \gamma, \varphi \rangle| \leqslant C \sup_{|\alpha|,|\beta| \leqslant k} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\|_\infty$$

Or, φ est à support compact donc il existe $M > 0$ tel que $K \subset B(0, M)$. D'où :

$$|\langle \gamma, \varphi \rangle| \leqslant C \sup_{\substack{|\alpha|,|\beta| \leqslant k \\ x \in K}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\| \leqslant C. \max_{k \in \mathbb{N}}(1, M^k) \sup_{|\beta| \leqslant k} \|\partial^\beta \varphi(x)\|$$

Donc γ est bien une distribution.

□

Exemples 3.1.

Distributions tempérées : Les Dirac et leurs dérivées. Les L^p avec leurs dérivées. Les fonctions f telles que : $\exists C > 0 \qquad |f(x)| \leqslant C(1 + |x|)^k$

$x \longmapsto e^{x+ie^x}$ est une distribution tempérée.

Distributions non tempérées : $x \longmapsto exp(x), \sum_{k \geqslant 1} exp(k)\delta_k.$

Démonstration des exemples.

Les dérivées seront faites plus tard.

- $\gamma = \delta_0$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$|\langle \gamma, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leqslant \sup_{|\alpha|,|\beta| \leqslant 0} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\|_\infty$$

- $\gamma \in L^p$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Par Hölder, on a :

$$|\langle \gamma, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \gamma \varphi(x) dx \right| \leqslant \|\gamma\|_p \|\varphi\|_{p'} \qquad avec \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Si $p = \infty$, il suffit de borner $|\langle \gamma, \varphi \rangle|$ par $\|\gamma\|_\infty \|\varphi\|_{0,\mathcal{S}}$ et c'est gagné.

Sinon :

$$\begin{aligned}
|\langle \gamma, \varphi \rangle| &\leqslant \|\gamma\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \\
&\leqslant \|\gamma\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\frac{1}{(1+|x|)^{d+1}}}_{\in L^1} \underbrace{|\varphi(x)|^{p'} (1+|x|)^{d+1}}_{\in L^\infty \ car \ \varphi \in \mathcal{S}} \right)^{1/p'} \\
\textit{Hölder} \longrightarrow &\leqslant \|\gamma\|_p \left\| \frac{1}{(1+|x|)^{d+1}} \right\|_1 \left\| \varphi(x)(1+|x|)^{\frac{d+1}{p'}} \right\|_\infty \\
&\leqslant C.K.\|\varphi\|_{m,\mathcal{S}} \qquad o\grave{u} \quad m = \left\lceil \frac{d+1}{p'} \right\rceil
\end{aligned}$$

Rappel 3.1. Pour $x \in \mathbb{R}$:

- ◇ $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \ : \ k \geqslant x\}$
- ◇ $\lfloor x \rfloor \qquad \max\{k \in \mathbb{Z} \ : \ k \leqslant x\}$

- f à croissance polynômiale : même idée que $f \in L^p$ (cf. le Dret)
- $x \longmapsto exp(x) \in L^1_{loc} \subset D'$. Cependant, elle n'est pas dans $\mathcal{S}'$.
  Argument "moral" : Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ telle que pour $|x| \geqslant 1$: $\varphi(x) = e^{-|x|/2}$.
  On a : $\langle \gamma, \varphi \rangle = +\infty$ car $\int_1^{+\infty} \gamma\varphi = \int_1^{+\infty} e^{x/2}$.
- Pour finir, $\gamma : x \longmapsto e^{x+ie^x}$. Soit $\alpha : x \longmapsto -ie^{ie^x}$, $\alpha \in L^\infty \in \mathcal{S}'$. Alors $\gamma = \alpha' \in \mathcal{S}'$ par le théorème suivant (théorème 3.1).

□

Définition 3.3. Soit $A : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ linéaire. On dit que A est continue si :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists C > 0 \quad \exists k' \in \mathbb{N} \qquad \|A\varphi\|_{k,\mathcal{S}} \leqslant C.\|\varphi\|_{k',\mathcal{S}}$$

En particulier : $\varphi_n \longrightarrow 0 \implies A\varphi_n \longrightarrow 0$

Théorème 3.1. *Les applications suivantes :*

(a) *La transformation de Fourier*

(b) *La dérivation*

(c) *La multiplication par $f \in \mathcal{C}^\infty$ telle que :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d \quad \exists C(\alpha) > 0 \qquad |\partial^\alpha f(x)| \leqslant C(\alpha)(|x| + 1)^{K(\alpha)}$$

(d) *La convolution par f telle que :*

$$\forall N \geqslant 0 \qquad f.|x|^N \in L^1$$

(e) *La réflexion : $\varphi \longmapsto \varphi(-\cdot)$*

(f) *La conjugaison*

(g) *La translation*

Sont continues sur $\mathcal{S}$.

Démonstration.

(c), (d) voir le Dret et **(e), (f), (g)** évidentes.

(a) Comme vu avant : $\|\mathcal{F}u\|_{k,\mathcal{S}} \leqslant C_{(k,d)}\|u\|_{k+d+1,\varphi}$

(b) $$\|\partial^\alpha u\|_{k,\mathcal{S}} = \sup_{|\beta|,|\gamma| \leqslant k} \|x^\beta \partial^{\alpha+\gamma} u(x)\|_\infty \leqslant \sup_{\substack{|\beta| \leqslant k+|\alpha| \\ |\gamma'| \leqslant k+|\alpha|}} \|x^\beta \partial^{\gamma'} u(x)\|_\infty = \|u\|_{k+|\alpha|,\mathcal{S}}$$

□

Corollaire 3.1. *Comme dans D', les opérations précédentes sont par définition définies par dualité sur $\mathcal{S}'$.*
Elles sont définies comme dans D' sauf la nouvelle opération $\mathcal{F}$ définie par :

$$\langle \mathcal{F}\gamma, \varphi \rangle := \langle \gamma, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

Proposition 3.2. *Si $\varphi \in \mathcal{S}'$ appartient à L^2, alors $\mathcal{F}\varphi$ coïncide avec la transformée de Fourier usuelle.*

Proposition 3.3. *$\mathcal{F}$ est inversible dans $\mathcal{S}'$ avec $\mathcal{F}^{-1}u = (2\pi)^{-d}\widetilde{\mathcal{F}u}$ pour $u \in \mathcal{S}'$.*

Proposition 3.4.

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\partial^\alpha u) & = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}u \\ F(x^\alpha u) & = i^{|\alpha|}\partial^\alpha(\mathcal{F}u) \end{cases} \qquad pour \quad u \in \mathcal{S}'$$

Théorème 3.2. *Soit $f \in \mathcal{S}'$. Alors il existe un unique $u \in \mathcal{S}'$ tel que $-\Delta u + u = f$ où $\Delta = -\sum\limits_{i=1}^{d} \dfrac{\partial^2}{x_i^2}$ (Le Laplacien, c'est aussi la divergence du gradient, i.e., la trace de la matrice Jacobienne du gradient ou Hessienne)*

Démonstration.

$$-\Delta u + u = f \quad \Longleftrightarrow \quad (1+|\xi|^2)\widehat{u} = \widehat{f}$$

On prend donc $\widehat{u} = \dfrac{1}{1+|\xi|^2}.\widehat{f}$.

$\square$

Définition 3.4. Si $f = \delta_0$, une solution $u \in \mathcal{S}'$ d'un EDP linéaire avec $H = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant N} C_\alpha \partial^\alpha$ générale $H(u) = \delta_0$ s'appelle une solution élémentaire de H.

Remarque 3.1. Intérêt Si $H(u) = \delta_0$, alors par linéarité :

$$H(u * f) = Hu * f = \delta_0 * f = f$$

Par exemple avec $-u' + 2u'' - 4u'''$.